Лекция 6 09.10.2024

§ 4. Целые функции

1⁰. Неравенства Коши

Теорема 1.

f голоморфна в области G, $K_R(z_0) \subset G$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,\ z \in K_R(z_0), \tag{1}$$

$$M_\rho = \max_{z \in \Gamma_\rho} |f(z)|, \tag{2}$$

где $\Gamma_\rho = \{z \mid |z - z_0| = \rho\}$ — окружность радиуса ρ с центром z_0, $0 < \rho < R$.

Тогда

$$|c_n| \le \frac{M_\rho}{\rho^n},\ n = 0, 1, 2, \dots. \tag{3}$$

Доказательство.

Поскольку

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta,$$

то

$$|c_n| \le \frac{1}{2\pi} M_\rho \frac{2\pi\rho}{\rho^{n+1}} = \frac{M_\rho}{\rho^n},$$

что и требовалось доказать.

2⁰. Понятие целой функции.

Определение.

Целая функция — это функция, голоморфная во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Примеры.

Многочлен, e^z, $\cos z$, $\sin z$.

3^0. Теорема 2. Лиувилль.

Если целая функция ограничена, то она постоянна.

Доказательство.

Пусть f — целая функция. Разложим ее в степенной ряд.

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,\ z\in\mathbb{C}. \tag{4}$$

Степенной ряд сходится во всей комплексной плоскости, и его сумма всюду совпадает с функцией f.

Допустим, функция f ограничена, $\exists M>0\ \forall z\in\mathbb{C}\ \left|f(z)\right|\le M$. По неравенству Коши

$$\left|c_n\right|\le \frac{M}{\rho^n}\underset{\rho\to+\infty}{\to}0,\ n=1,2,\dots.$$

Следовательно,

$$c_1=c_2=\dots=0,$$

$$\forall z\in\mathbb{C}\ f(z)=c_0.$$

4^0. Основная теорема высшей алгебры.

Теорема 3.

$P(z)$ — многочлен степени $n\ge 1$.

Тогда $\exists z_0\in\mathbb{C}\ P(z_0)=0$.

Всякий многочлен, отличный от постоянной, с комплексными коэффициентами имеет хотя бы один комплексный корень.

Доказательство (от противного).

Допустим, $\forall z\in\mathbb{C}\ P(z)\ne 0$. Тогда функция $f=1/P$ целая. Поскольку $P(z)\underset{z\to\infty}{\to}\infty$, то $f(z)\underset{z\to\infty}{\to}0$, f — целая ограниченная функция. По теореме Лиувилля f — постоянная.

Стремление функции к нулю означает теперь, что $f=0$. С другой стороны, $f=\dfrac{1}{P}$ не может обратиться в нуль ни в одной точке.

Противоречие показывает ошибочность нашего допущения. Многочлен P имеет корни.

§ 5. Нули голоморфной функции

1⁰. Определение.

Пусть f — функция, голоморфная в области G.

1) $z_0 \in G$ называется нулем функции f, если $f(z_0) = 0$.

2) Нуль z_0 функции f называется изолированным, если в некоторой окрестности точки z_0 других нулей нет, если

$$\exists r > 0 \ \forall z \in \dot{K}_r(z_0) \ f(z) \neq 0.$$

2⁰. Лемма об изолированности нуля.

Пусть f — голоморфная в области G функция, z_0 — ее нуль,

$$K_R(z_0) \subset G.$$

Тогда выполнено одно из условий:

1) $f = 0$ на $K_R(z_0)$,

2) z_0 — изолированный нуль.

Доказательство.

Разложим функцию f в степенной ряд:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \ z \in K_R(z_0)$$

($c_0 = f(z_0) = 0$).

Может случиться, что $c_1 = c_2 = \cdots = 0$, выполнено первое условие.

В противном случае положим k равным номеру первого ненулевого коэффициента. Разложение функции имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^k \sum_{m=0}^{\infty} c_{m+k} (z - z_0)^m = (z - z_0)^k \varphi(z),$$

где

$$\varphi(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_{m+k} (z - z_0)^m \ —$$

функция, голоморфная в круге $K_R(z_0)$, $\varphi(z_0) = c_k \neq 0$. По непрерывности

$$\exists r>0\ \forall z\in K_r\left(z_0\right)\ \varphi\left(z\right)\neq 0,$$

$$\forall z\in \dot{K}_r\left(z_0\right)\ f\left(z\right)\neq 0,$$

z_0 — изолированный нуль.

3⁰. Определение.

z_0 — изолированный нуль функции f.

Номер первого ненулевого коэффициента в разложении Тейлора функции f по степеням $z-z_0$ называется порядком нуля.

Нуль первого порядка называется еще простым нулем.

Теорема 1.

Пусть f голоморфна в области G, $z_0\in G$.

Равносильны утверждения

1) z_0 — нуль порядка k,

2) $f\left(z_0\right)=f'\left(z_0\right)=\cdots=f^{(k-1)}\left(z_0\right)=0,\ f^{(k)}\left(z_0\right)\neq 0$, т.е. k — номер первой отличной от нуля производной,

3) f представима в виде

$$f\left(z\right)=\left(z-z_0\right)^k\varphi\left(z\right),$$

φ голоморфна в окрестности точки z_0, $\varphi\left(z_0\right)\neq 0$,

4) $\exists\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f\left(z\right)}{\left(z-z_0\right)^k}\neq 0,\infty$.

Доказательство.

Поскольку

$$c_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}\left(z_0\right),$$

то $1)\Leftrightarrow 2)$.

В лемме установлено. что $1)\Rightarrow 3)$.

$3)\Rightarrow 4)$. Пусть $f\left(z\right)=\left(z-z_0\right)^k\varphi\left(z\right)$, тогда

$$\frac{f(z)}{(z-z_0)^k} = \varphi(z) \underset{z \to z_0}{\to} \varphi(z_0) \neq 0, \infty .$$

$4) \Rightarrow 1)$. Пусть $\exists \lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z)}{(z-z_0)^k} \neq 0, \infty$, а z_0 при этом является нулем порядка l. Тогда $f(z) = (z-z_0)^l \varphi(z)$, φ голоморфна в окрестности точки z_0, $\varphi(z_0) \neq 0$ и

$$\frac{f(z)}{(z-z_0)^k} = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^{k-l}} \underset{z \to z_0}{\to} \begin{cases} 0, \; k < l, \\ \varphi(z_0), \; k = l, \\ \infty, \; k > l. \end{cases}$$

Мы вынуждены признать, что $l = k$, z_0 — нуль порядка k.

§ 6. Теорема единственности

Теорема 1.

Пусть f голоморфна в области G.

$z_k \in G, \; k = 1, 2, \ldots, \; z_k \neq z_l \; (k \neq l), \; z_k \underset{k \to \infty}{\to} z_0 \in G$

$f(z_k) = 0$

Тогда $f = 0$.

Множество нулей голоморфной в области G функции, отличной от постоянной, не имеет предельных точек в G.

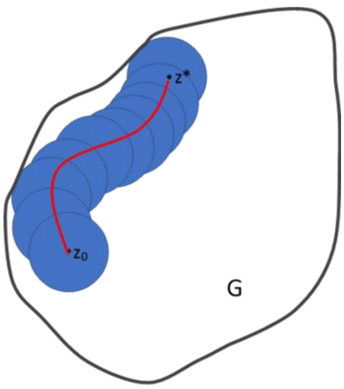
Доказательство.

1) По непрерывности $f(z_0) = 0$.

2) z_0 — неизолированный нуль. По лемме $f = 0$ в любом круге $K_R(z_0) \subset G$.

3) Пусть $z^* \in G$, соединим z_0 и z^* путем γ с носителем Γ, проходящим в G.

$$\exists r > 0 \; \forall z \in \Gamma \; \rho(z, \partial G) \geq r, \; K_r(z) \subset G.$$



Подберем точки $z_0, \; z_1, \ldots, z_m = z^*$ так, чтобы $|z_k - z_{k-1}| < r \; (k = 1, 2, \ldots, m)$, и рассмотрим круги

$$K_j = K_r\left(z_j\right).$$

По лемме $f = 0$ на K_0, $z_1 \in K_0$, z_1 — предельная точка для множества нулей функции f, $f = 0$ на K_1 и т.д., $f = 0$ на K_{m-1}, $f\left(z^*\right) = 0$, $f = 0$.

Следствие 1.

$$f\left(z_k\right) = g\left(z_k\right),\ k = 1, 2, \ldots \Rightarrow f = g$$

Следствие 2.

$f = g$ на некотором круге или на кусочно-гладкой кривой $\Rightarrow$ $f = g$.

Замечание

В теореме единственности требование $z_0 \in G$ существенно. Функция $f\left(z\right) = \sin\left(1/z\right)$ голоморфна в области $G = \mathbb{C} \setminus \left\{0\right\}$ и обращается в нуль в точках $z_k = \dfrac{1}{\pi k} \underset{k\to\infty}{\to} 0 \notin G$.

$f\left(z_k\right) = 0\ \left(k = 1, 2, \ldots\right)$, но $f \neq 0$.